

Accords justes et tempérament adaptatif

Frédéric Faure (institut Fourier, Grenoble),
avec Malik Mezzadri, Alexandre Ratchov

20 mai 2016, séminaire MaMux

Objectifs

- ❶ Étudier et représenter **géométriquement** les couleurs harmoniques, les **accords justes**
 - ❷ Développer un cadre utilisable par des musiciens, improvisateurs, compositeurs. (Ex : concert du 27 fev. 2015 avec M. Zampieri, J.L. Lehr)
- Références :
 - ▶ **Livre de Dave Benson** 2008, [1], “Music: a Mathematical Offering” retrace de nombreux travaux, ...Babyloniens, Pythagore, Zarlino (1558), Rameau (1722), Euler (1760), ...
 - ▶ **Livre de Schnupp** 2011, [4] “ Auditory neuroscience: Making sense of sound “ and Auditoryneuroscience web site
 - ▶ **Article** 2015 de FF,MM,AR "Analyse et jeu musical en tempérament juste adaptatif", hal-01119499 [2].

Objectifs

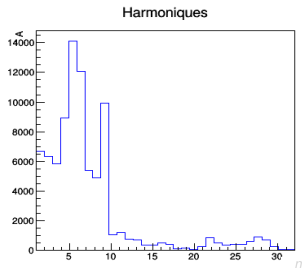
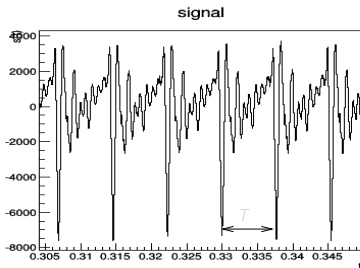
- ❶ Étudier et représenter **géométriquement** les couleurs harmoniques, les **accords justes**
 - ❷ Développer un cadre utilisable par des musiciens, improvisateurs, compositeurs. (Ex : concert du 27 fev. 2015 avec M. Zampieri, J.L. Lehr)
- Références :
 - ▶ **Livre de Dave Benson** 2008, [1], "Music: a Mathematical Offering" retrace de nombreux travaux, ...Babyloniens, Pythagore, Zarlino (1558), Rameau (1722), Euler (1760), ...
 - ▶ **Livre de Schnupp** 2011, [4] " Auditory neuroscience: Making sense of sound " and Auditoryneuroscience web site
 - ▶ **Article** 2015 de FF,MM,AR "Analyse et jeu musical en tempérament juste adaptatif", hal-01119499 [2].

Notes

- Une **note de fréquence** f est un signal sonore $s(t)$ périodique de période $T = 1/f$ « raisonnable » (avec $50\text{Hz} \leq f \leq 3000\text{Hz}$ et suffisamment d'harmoniques), .
- Le signal $s(t)$ se décompose en **modes de Fourier** aux fréquences $f, 2f, 3f, \dots, nf, \dots$ appelées **harmoniques** avec des amplitudes

$$|(\mathcal{F}s)(n)| := \left| \int_0^T e^{-i2\pi(nf)t} s(t) dt \right|, \quad n \in \mathbb{Z},$$

- Exemple : voyelle « A »,

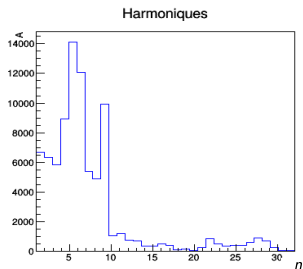
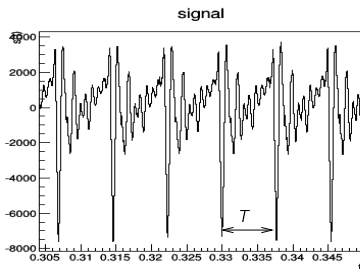


Notes

- Une **note de fréquence** f est un signal sonore $s(t)$ périodique de période $T = 1/f$ « raisonnable » (avec $50\text{Hz} \leq f \leq 3000\text{Hz}$ et suffisamment d'harmoniques), .
- Le signal $s(t)$ se décompose en **modes de Fourier** aux fréquences $f, 2f, 3f, \dots, nf, \dots$ appelées **harmoniques** avec des amplitudes

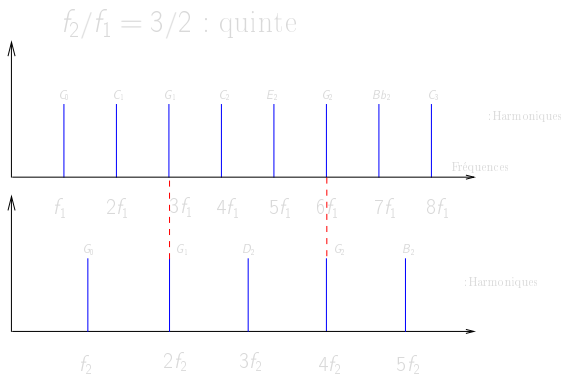
$$|(\mathcal{F}s)(n)| := \left| \int_0^T e^{-i2\pi(nf)t} s(t) dt \right|, \quad n \in \mathbb{Z},$$

- Exemple : voyelle « A »,



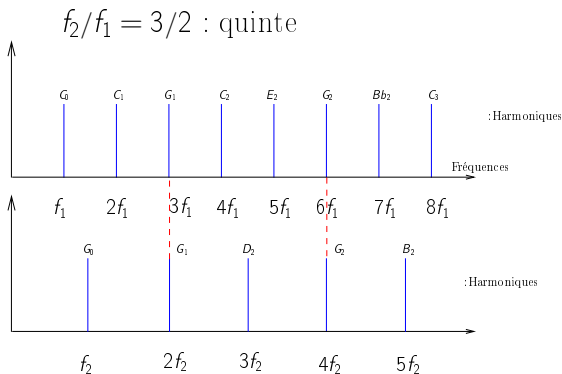
Intervalles justes

- Un **intervalle juste** (ou accord juste à 2 notes) est formé de **deux notes** dont le rapport de fréquences est un « **petit** » **rationnel** : $f_2/f_1 = \frac{a}{b}$, comme $\frac{1}{1}$ (unisson), $\frac{2}{1}$ (octave), $\frac{3}{2}$ (quinte), $\frac{4}{3}$ (quarte), etc...
- Exemple $C_0 - G_0$: voir exemples sur le « verger »



Intervalles justes

- Un **intervalle juste** (ou accord juste à 2 notes) est formé de **deux notes** dont le rapport de fréquences est un « **petit** » **rationnel** : $f_2/f_1 = \frac{a}{b}$, comme $\frac{1}{1}$ (unisson), $\frac{2}{1}$ (octave), $\frac{3}{2}$ (quinte), $\frac{4}{3}$ (quarte), etc...
- Exemple $C_0 - G_0$: **voir exemples sur le « verger »**

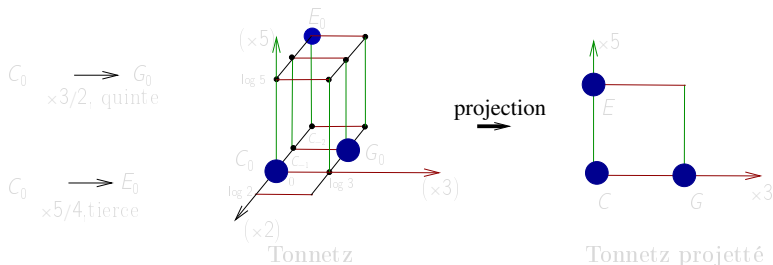


Représentation d'un intervalle juste sur le tonnetz (Euler 1739)

- Ex : pour la quinte,

$$f_2 = \frac{3}{2} f_1 \Leftrightarrow \log f_2 = \log f_1 - \log 2 + \log 3$$

- Le **tonnetz** est le réseau $\mathbb{Z}^{\log P}$ de dimension ∞ avec $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

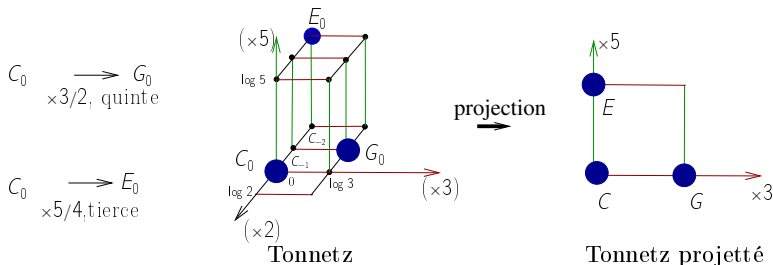


Représentation d'un intervalle juste sur le tonnetz (Euler 1739)

- Ex : pour la quinte,

$$f_2 = \frac{3}{2} f_1 \Leftrightarrow \log f_2 = \log f_1 - \log 2 + \log 3$$

- Le **tonnetz** est le réseau $\mathbb{Z}^{\log P}$ de dimension ∞ avec $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

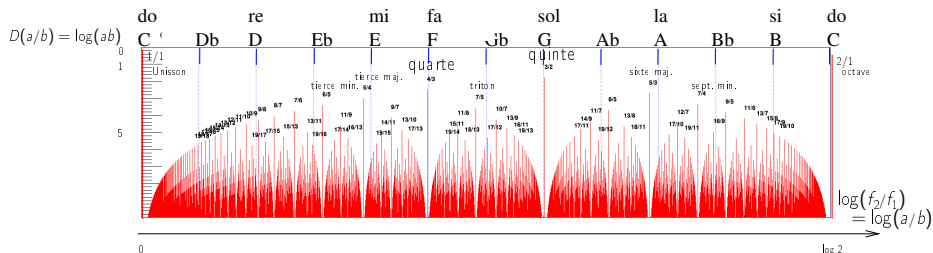


Dissonance

- La **dissonance** d'un intervalle juste $f_2/f_1 = \frac{a}{b}$ (irréductible) est sa **longueur** (l^1 ou Manhattan) sur le tonnetz.

$$D(a/b) = \log a + \log b = \log(ab)$$

- Cela donne la **fractale** du « verger d'Euclide » :

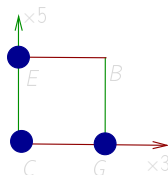
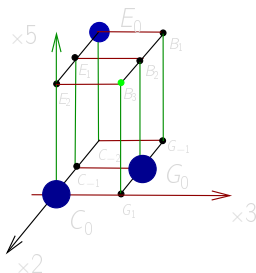
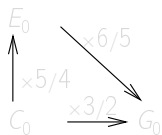


Accord juste

- Un **accord juste** A est un ensemble de N notes de fréquences $f_1, f_2, \dots, f_N$ formé d'intervalles justes.
- La **dissonance** de l'accord est la somme des dissonances (distances) mutuelles :

$$D(A) := \sum_{i,j} D(f_i/f_j)$$

ex : Triade majeure



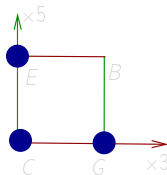
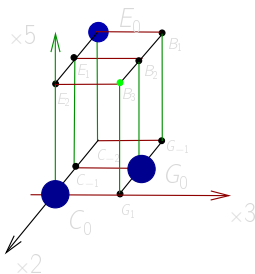
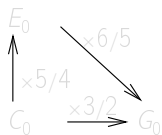
$$Diss = \log(5.4) + \log(3.2) + \log(6.5) = 8.18$$

Accord juste

- Un **accord juste** A est un ensemble de N notes de fréquences $f_1, f_2, \dots, f_N$ formé d'intervalles justes.
- La **dissonance** de l'accord est la somme des dissonances (distances) mutuelles :

$$D(A) := \sum_{i,j} D(f_i/f_j)$$

ex : Triade majeure



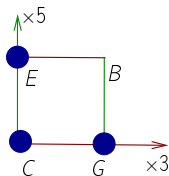
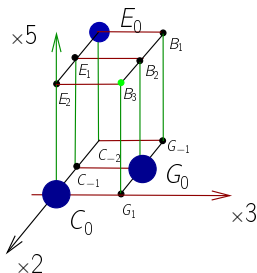
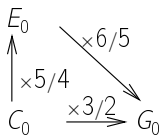
$$Diss = \log(5.4) + \log(3.2) + \log(6.5) = 8.18$$

Accord juste

- Un **accord juste** A est un ensemble de N notes de fréquences $f_1, f_2, \dots, f_N$ formé d'intervalles justes.
- La **dissonance** de l'accord est la somme des dissonances (distances) mutuelles :

$$D(A) := \sum_{i,j} D(f_i/f_j)$$

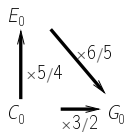
ex : Triade majeure



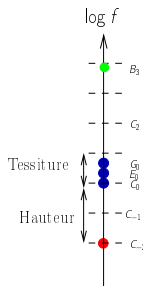
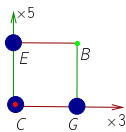
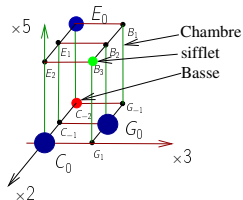
$$Diss = \log(5.4) + \log(3.2) + \log(6.5) = 8.18$$

Aspects géométriques et « couleur » d'un accord juste

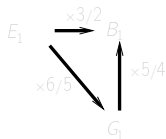
ex: Triade majeure



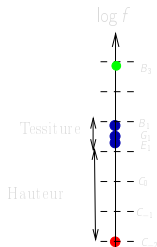
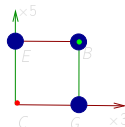
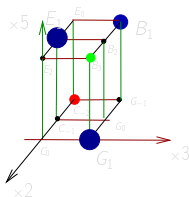
$$Diss = \log(5.4) + \log(3.2) + \log(6.5) = 8.18$$



ex : Triade mineure

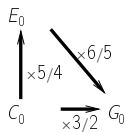


$$Diss = \log(5.4) + \log(3.2) + \log(6.5) = 8.18$$

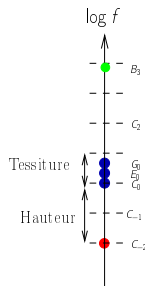
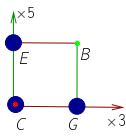
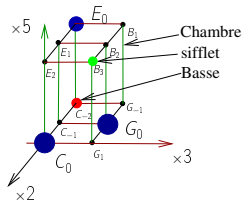


Aspects géométriques et « couleur » d'un accord juste

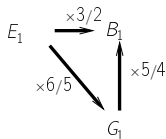
ex: Triade majeure



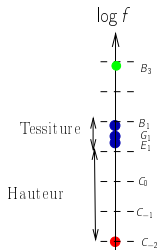
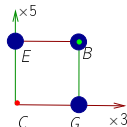
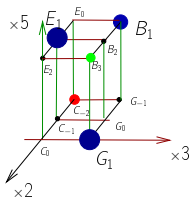
$$Diss = \log(5.4) + \log(3.2) + \log(6.5) = 8.18$$



ex : Triade mineure

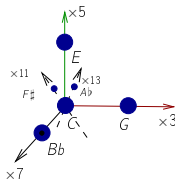


$$Diss = \log(5.4) + \log(3.2) + \log(6.5) = 8.18$$



Représentation de 3, 5, 7, 11 ... sur le tonnetz

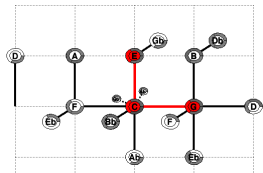
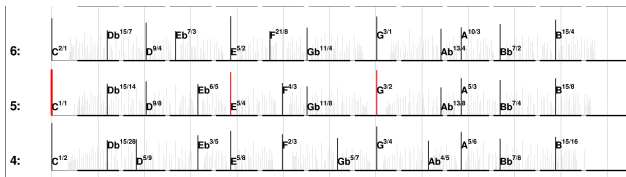
Chaque nombre premier correspond à une nouvelle dimension. On ne représente pas les facteurs $\times 2$, mais :



- Ex : écoute de deux variantes de Cm^7 . (ex.4)
- Ex : écoute de $Cm^{7,b5,11} \rightarrow F^{7,\#9,\#11} \rightarrow Bbm^{11,\#9}$. (ex1)

Tempérament adaptatif (à 12 notes par octaves)

- Définition : Si un accord A est présent, le **choix d'une prochaine note n** dans un intervalle donné de 1 octave/12 ($=\frac{1}{2}$ ton) est tel qu'il **minimise la dissonance** du nouvel accord $A' = A \cup \{n\}$.

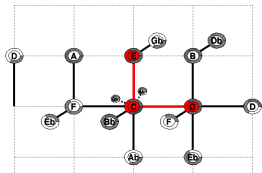
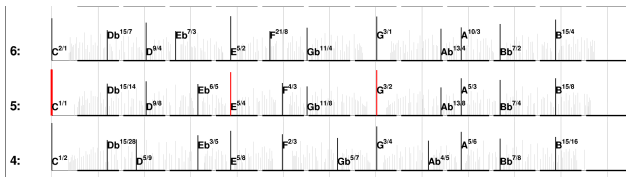


- Remarques :

- ▶ Invariant par transposition mais **non commutatif** :
 $C_0 - G_0 - Bb_0 - Eb_0 \neq C_0 - G_0 - Eb_0 - Bb_0$.
- ▶ Décalage possible du « diapason » si on s'éloigne sur le tonnetz.
- ▶ Le résultat dépend très peu du choix de la fonction $D(a/b) = \log(ab)$.

Tempérament adaptatif (à 12 notes par octaves)

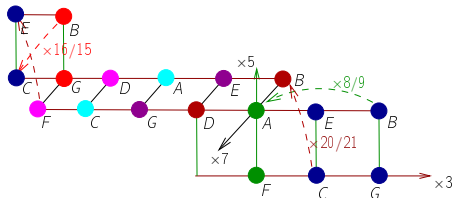
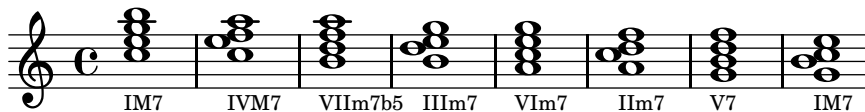
- Définition : Si un accord A est présent, le **choix d'une prochaine note** n dans un intervalle donné de 1 octave/12 ($=\frac{1}{2}$ ton) est tel qu'il **minimise la dissonance** du nouvel accord $A' = A \cup \{n\}$.



- Remarques :
 - ▶ Invariant par transposition mais **non commutatif** :
 $C_0 - G_0 - Bb_0 - Eb_0 \neq C_0 - G_0 - Eb_0 - Bb_0$.
 - ▶ Décalage possible du « diapason » si on s'éloigne sur le tonnetz.
 - ▶ Le résultat dépend très peu du choix de la fonction $D(a/b) = \log(ab)$.

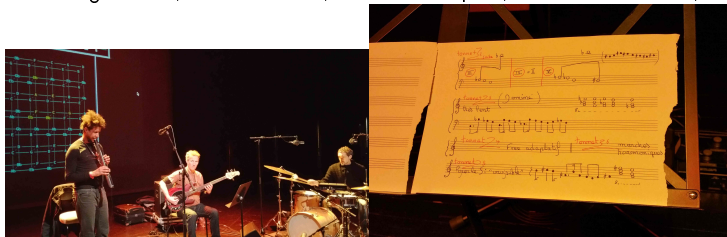
Exemple de « cadence »

- La « grande cadence » avec seulement les petits mouvements ton $8/9 = 2^3 3^{-2}$ et demi-ton $20/21 = 2^2 3^{-1} 5^1 7^{-1}$ et la **résolution du triton** « B-F → C-E » à la fin.

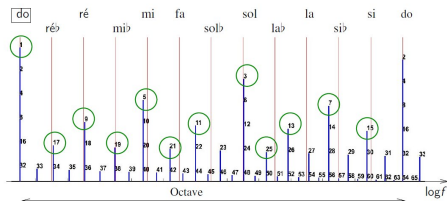


Concert le 27/2/2015 à l'hexagone de Meylan

Avec Magic Malik, Jean Luc Lehr, Maxime Zampieri, Alexandre Ratchov,



- Avec le “**tempérament des harmoniques**” (cercles verts) : 2_morceau_2.mp3 à 43”,
morceau_2_debut.mp4 à 30”.



- En **tempérament adaptatif** 5_morceau_4.mp3 à 7'03" et 11'10". et
morceau_concert_avec_basse_et_sifflet.mpg 7_morceau_6.mp3 à 6'10" et 8'10".

Conclusion

- Le **tempérament adaptatif** permet de jouer avec des **accords justes** dont la dissonance est minimale.
- La définition précise de la **dissonance** $D(a/b) = \log(ab)$ n'est pas très importante (voir annexe).
- Il est utile de représenter les accords sur le **réseau tonnetz**. La forme *géométrique* d'un accord informe sur sa couleur harmonique.
- Perspectives :
 - ▶ Tenir compte des intensités et timbres des notes
 - ▶ Combiner avec une étude du rythme
 - ▶ Instruments acoustiques pour le tempérament adaptatif ou notes micro-tonales

annexe : sur le choix de la dissonance

- **Propriété** : le choix des notes dans l'algorithme du tempérament adaptatif ne dépend pas (ou très peu) du choix de la fonction Dissonance.
- « Preuve » : Avec un choix $D'(a/b) := \log(a^\alpha b^\beta) = \alpha \log a + \beta \log b$ avec $\alpha, \beta \geq 0$ arbitraires, si $\frac{a}{b} = \underbrace{f}_{\text{fixe}}(1+r)$ avec $|r| < \epsilon \ll 1$ alors

$$\log(a) = \log b + O(\epsilon) + cste$$

$$D'(a/b) = (\alpha + \beta) \log b + O(\alpha\epsilon) + cste$$

donc $D'(a/b)$ minimum $\Leftrightarrow \log b$ minimum.

Donc le minimum est indépendant du choix de α, β .

annexe : Nombre premiers et Tonnetz

- **Théorème fondamental de l'arithmétique**, (Euclide, Gauss 1801)
on a

$$f_2 = \frac{a}{b} f_1 = \left(\prod_{p \in P} p^{n_p} \right) f_1 \Leftrightarrow \log f_2 = \log f_1 + \sum_{p \in P} n_p \log p$$

avec $n_p \in \mathbb{Z}$ et les **nombre premiers**

$$p \in P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

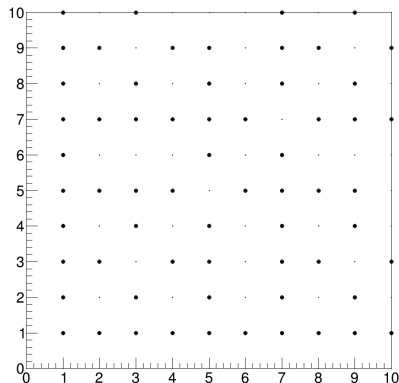
Les indices $n_p \in \mathbb{Z}$ sont les coordonnées de la fraction a/b sur le réseau Tonnetz.

annexe : Verger d'Euclide

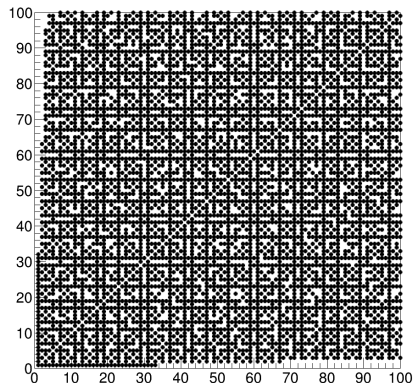
C'est une représentation des fractions irréductibles a/b :

« Ce sont les troncs d'arbres d'un verger que verrait un observateur situé au point $(0,0)$. Les autres sont cachées. ».

foret



foret

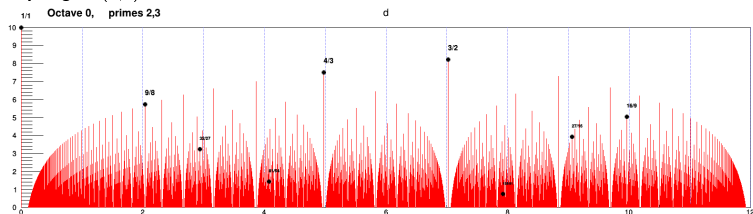


annexe : fractale de Euclide

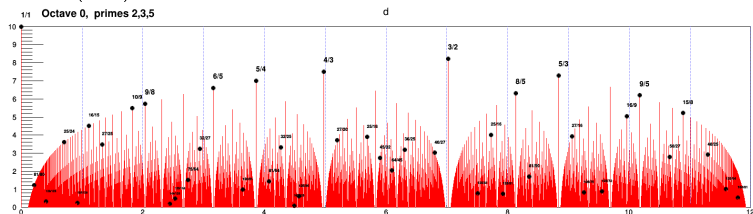
Les traits rouges représentent toutes les fractions a/b . Les points noirs sont les fractions contruites avec certains

nombres premiers. On observe que 2, 3 sont insuffisants ...

Échelle de Pythagore (2,3) :

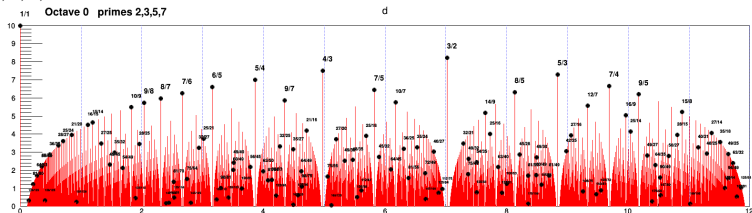


Échelle de Zarlino (2,3,5) :

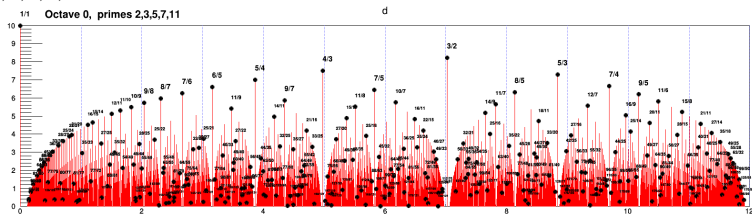


annexe : fractale de Euclide (suite)

Les traits rouges représentent toutes les fractions a/b . Les points noirs sont les fractions contruites avec certains nombres premiers. On observe que 2, 3 sont bien insuffisants ...
Échelle 2, 3, 5, 7

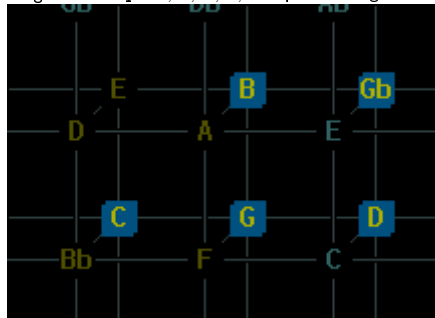


Échelle 2, 3, 5, 7, 11

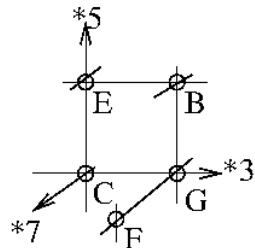


annexe : Signature tonale Majeur de Malik et tonnetz

La gamme GM_1 : G, B, D, E, Gb , qui est la signature tonale de G majeur.



Il y a une autre possibilité non équivalente c'est la gamme CM_2 : C, E, F, G, B , qui est la signature tonale de C majeur.



Annexe : Gamme de Zarlino, XV^eme siècle.

- Zarlino, XV^eme siècle. Mise en valeur de la quinte juste et tierce juste.

A	E	B	
F	C	G	D

- Contient les notes justes des triades de Fa, Do, Sol, cad :
(F,A,C), (C,E,G), (G,B,D).
- Cette gamme F,A,C,E,G,B,D est appelée gamme de “l’intonation juste”.
- Le problème par ex. est que l’accord Dm=(D,F,A) sonne faux.

Annexe : Raga indiens

- Le Raga carnatique Mohana est

E			
C	G	D	A

- C'est une gamme pentatonique.
- Le raga carnatique Hindolan (aussi en musique hindoustanie , où il s'appelle Malkauns) ?

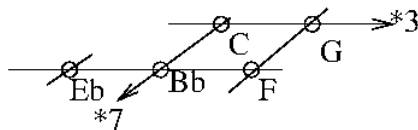
Annexe : Gamme pentatonique majeur

F	C	G	D	A
---	---	---	---	---

Utilisée partout dans le monde.

- jouée dans l'ordre croissant des fréquences, cela donne : **F,G,A,C,D,(F)** , utilisé par ex. en musique irlandaise.
- Le mode **C,D,F,G,A,C** est appelé Raga Suddha Saveri en musique indienne, et mode Bac en musique vietnamienne (aussi utilisé en musique chinoise).
- Le mode **G,A,C,D,F** est le raga Madhyamavati en musique indienne.
- Le mode **D,F,G,A,C,D** est le raga Udayaravichandrik en musique indienne. (aussi utilisé en musique d'amérique du sud)

Annexe : Gamme pentatonique mineur ?



- Dans l'ordre : C, Eb, F, G, Bb, (C).
- elle n'est pas équivalente à la gamme pentatonique majeur Eb, F, G, Bb, C, Eb qui n'utilise que l'axe *3.

Annexe : Gamme Pythagoricienne à 7 notes (heptatonique)

- Ce sont 7 notes en rapport de $3/2$ (quinte juste).

F	C	G	D	A	E	B
---	----------	---	---	---	---	---

- Utilisée au moyen age et renaissance, jusqu'au XVI^e siècle, en théorie et en pratique. (rem : Il y a 6 gammes à 7 notes qui contiennent C,G.)
- Utilisé en musique indienne : Raga Kalyani :

C	G	D	A	E	B	F#
----------	---	---	---	---	---	----

- Raga Thodi :

Db	Ab	Eb	Bb	F	C	G
----	----	----	----	---	----------	---

Annexe : Mode indien carnatique Shankarabharana

A'	E	B		
F	C	G	D	A

Référence : [3]. Remarques :

- Le problème est que la tierce F-A est fausse.
- A s'appelle "chatusruti dha". Il est "lumineux, exultant, acidulé. A' s'appelle "trisruti dha" est calme, apaisé, triste.
- Ex cité par F. Pham p.10 [3] : Si C,D ; A',G ; G,F,E,D,C est joué plusieurs fois, puis C,D ; A,G ; G,F,E,D,C : joué à la fin. Alors le A sonne

Annexe : Gamme pythagoricienne chromatique

Db	Ab	Eb	Bb	F	C	G	D	A	E	B	F#
----	----	----	----	---	----------	---	---	---	---	---	----

- Utilisation : la “**modulation**” : on utilise un mode heptatonique parmi les 5 qu'elle contient, et on passe de l'un à l'autre.
- Intérêt : on accorde une harpe de façon fixée.
- Remarque : la quinte F#-Db est fausse appelée « **quinte du loup** », les musiciens au moyen âge l'évitait.

Conclusion

- Le **tempérament adaptatif** permet de jouer avec des **accords justes** dont la dissonance est minimale.
- La définition précise de la **dissonance** $D(a/b) = \log(ab)$ n'est pas très importante.
- Il est utile de représenter les accords sur le **réseau tonnetz**. La forme *géométrique* d'un accord informe sur sa couleur harmonique.
- Perspectives :
 - ▶ Tenir compte des intensités et timbres des notes
 - ▶ Combiner avec une étude du rythme
 - ▶ Instruments acoustiques pour le tempérament adaptatif ou notes micro-tonales



DJ Benson.

Music: a mathematical offering.

Free pdf version on

<http://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/maths-music.html>.



F Faure, M. Mezzadri, and F. Ratchov.

Analyse et jeu musical en tempérament juste adaptatif.

link, 2015.



F. Pham.

Gammes naturelles et justesse expressive : l'exemple de la musique indienne.

PrÃ©publ. du laboratoire J.A. Dieudonné, 50, 2003.



Jan Schnupp, Israel Nelken, and Andrew King.

Auditory neuroscience: Making sense of sound.

MIT Press, 2011.